Doutorado
Matemática

UFG- Instituto de Matemática e Estatística

Goiânia, 20 de Dezembro de 2013

Aluno:

Exame de qualificação-Otimização

Questão 1. .

i) Enuncie as condições necessárias (teorema) de otimalidade de primeira ordem de Lagrange para problemas de otimização com restrições de igualdade.

ii) Seja $D = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = a\} \neq \emptyset$, onde A é uma matriz de dimensão $l \times n$ com posto l e $a \in \mathbb{R}^l$. Dado $y \in \mathbb{R}^n$ qualquer, achar a projeção de y sobre D, i.e., a solução do problema

$$min\ \|x - y\| \quad \text{sujeito a} \quad Ax = a.$$

Questão 2. *Seja $\emptyset \neq K \subset \mathbb{R}^n$ um cone convexo fechado. Provar que $\bar{x} = P_K(x)$ se, e somente se,*

$$\bar{x} \in K, \qquad x - \bar{x} \in K^*, \qquad < \bar{x}, x - \bar{x} >= 0,$$

onde $K^* = \{y \in \mathbb{R}^n :< y, d >\leq 0\ \forall d \in K\}$.

Questão 3. .

i) Defina subdiferencial de uma função convexa e fale sobre suas principais propriedades.

ii) Seja $f_1, f_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funções convexas, e denote por $\partial f_i(x)$ o subdiferencial de f_i no ponto x, $i = 1, 2$. Mostre que $\partial(f_1 + f_2)(x) = \partial f_1(x) + \partial f_2(x)$.

Questão 4. .

i) Enuncie as condições necessárias primal-dual (teorema) de otimalidade de primeira ordem de Karush-Kuhn-Tucker para problemas de otimização com restrições de igualdade e desigualdade.

ii) Sejam $x_1, \cdots, x_n$ números não negativos. Mostre que a média geométrica desse números e menor ou igual a média aritimética, isto é,

$$\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leqslant \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}.$$

Dica: Considere o problema de otimização

$$(Q_g) \begin{cases} \min & x_1 + \cdots + x_n \\ \text{s. a.} & x_1 \cdots x_n = 1, \\ & x \geq 0. \end{cases}$$

Questão 5. .

i) Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x/\sqrt{1+x^2}$. Analise o comportamento (boa definição, convergência e taxa de convergência) da sequência $\{x_k\}$ gerada pelo o método de Newton para resolver $f(x) = 0$ com diferentes escolhas do ponto inicial $x_0 \in \mathbb{R}$.

ii) Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = (1/2)x^T Ax + b^T x$, onde A é uma matriz simétrica definida positiva de dimensão n, $b \in \mathbb{R}^n$.

a) Mostre que se $\nabla f(x)^T d = 0$ com $d \neq 0$, então d é uma direção de subida a partir de x.

b) Obtenha uma fórmula explicita para o comprimento do passo do método do gradiente com busca exata aplicado para minimizar a função f.

BOA PROVA