UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Exame de Análise no $\mathbb{R}^n$

Sejam $\mathbb{E}$ e $\mathbb{F}$ espaços vetoriais. Um ponto $a \in \mathbb{F}$ é um *valor regular* de uma aplicação diferenciável $f : U \to \mathbb{F}$, definida no aberto $U \subset \mathbb{E}$, quando para todo ponto $x \in U$ tal que $f(x) = a$, a derivada $f'(x) : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ é uma transformação linear sobrejetiva.

Questão 1. *A) Sejam M o espaço vetorial das matrizes $n \times n$ e $S \subset M$ o subespaço das matrizes simétricas. Seja $f : M \to S$ a aplicação $f(X) = X.X^T$, onde X^T denota a tranposta de X. Mostre que a matriz identidade I é um valor regular de f.*

B) Seja $f : M \to M$ a aplicação $f(X) = X^n$, onde n é um número natural. Mostre que, se A esta suficientemente próximo da matriz identidade I então a equação

$$X^n = A$$

tem solução.

Questão 2. *Seja ω uma 1-forma diferenciável definida por*

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} a_i(x) dx_i,$$

onde $a_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ são funções diferenciáveis para $i = 1, ..., n$. Mostre que $d\omega = 0$ se, e somente se, existe uma função diferenciável $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que $df = \omega$.

Professor: Orizon
Turma: Mestrado em Matemática
December 18, 2001.